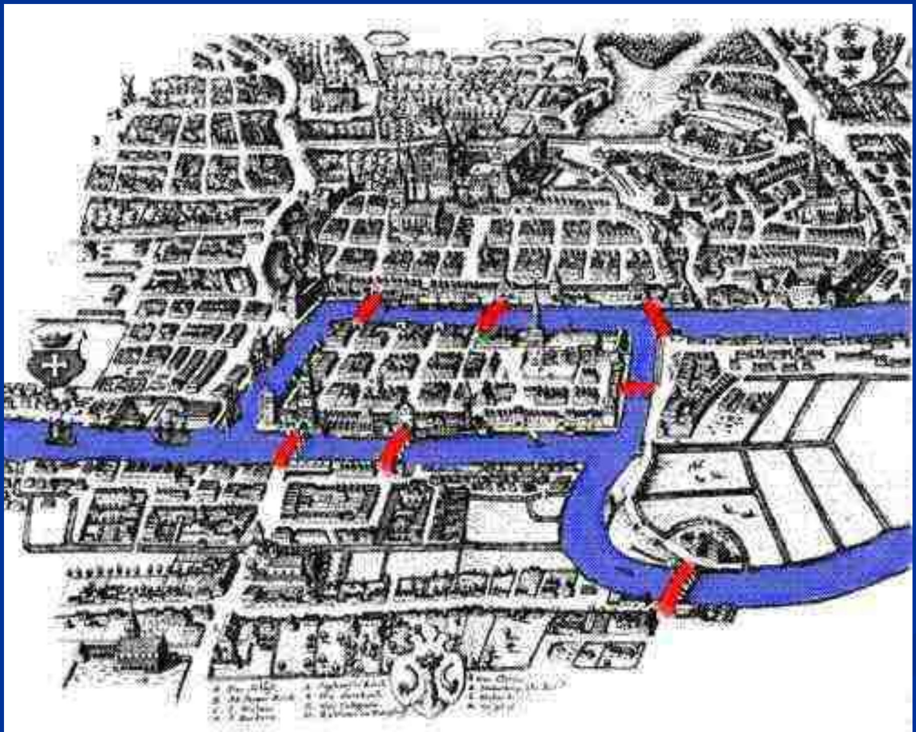
Teoría de Grafos



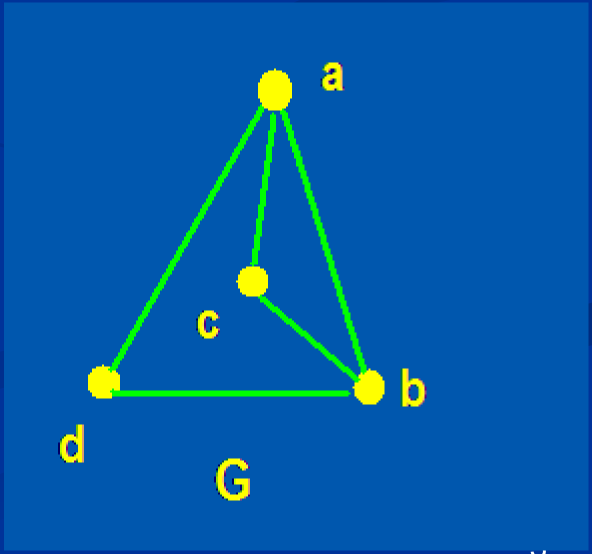
Indice

1. Tipos de grafos
2. Conceptos Básicos
3. Representación de grafos
4. Subgrafos. Grafos complementarios
5. Caminos y conectividad
6. Grafos Bipartitos

Tipos de Grafos

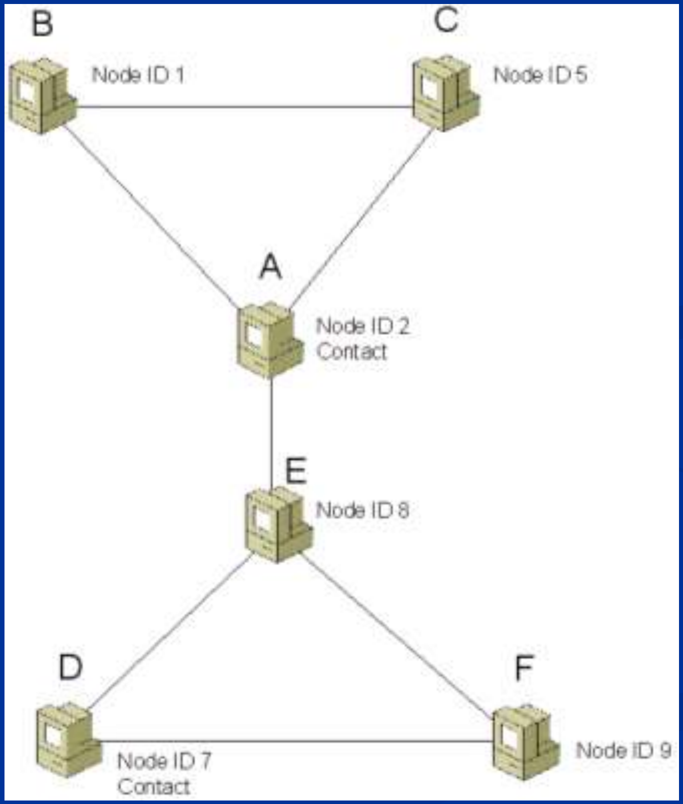
- Un grafo **G** es un par **(V,E)** donde:
  - $V = \{v_1,\ldots,v_n\}$ es un conjunto de vértices
  - $E = \{e_1,\ldots,e_m\}$ es un conjunto de aristas,

    con cada $e_k \in \{v_i, v_j\}$, con $v_i, v_j \in V$, $v_i \neq v_j$
- Los vértices se representan como puntos y las aristas como líneas entre vértices
- Ejemplo:
  - $G = (V,E)$
  - $V = \{a,b,c,d\}$
  - $E = \{\{a,b\}, \{b,c\}, \{a,c\}, \{a,d\}, \{d,b\}\}$



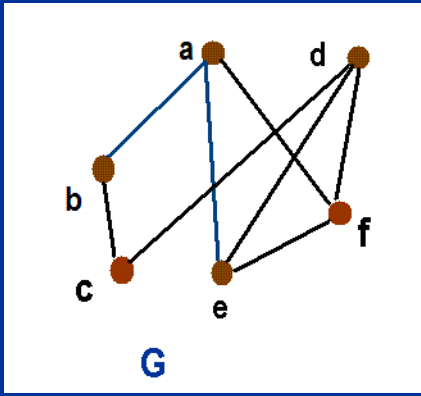
Tipos de Grafos

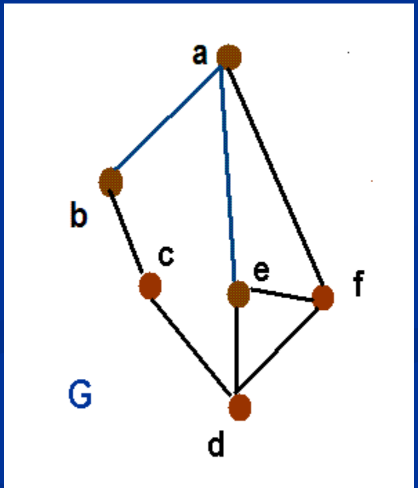
- Ejemplo: red de ordenadores



Tipos de grafos

- Es importante recordar que un mismo grafo puede tener diferentes representaciones gráficas
- **Ejemplo**:



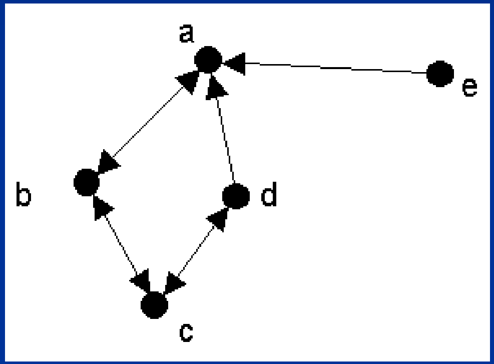


Dos representaciones del mismo grafo

G = ({a,b,c,d,e,f},{{a,b},{a,e},{a,f}{e,f},{b,c},{c,d},{e,d},{d,f}})

Tipos de Grafos

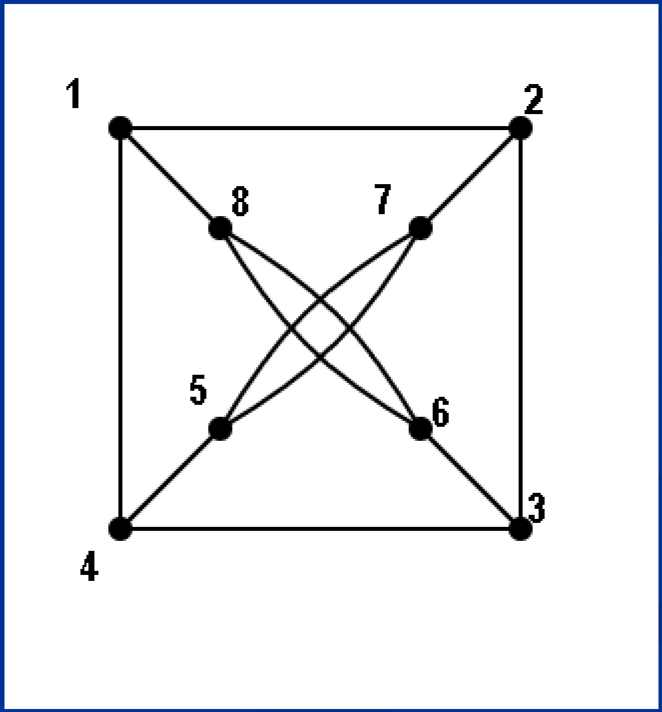
- Si el orden influye en la aristas se habla de **grafos dirigidos**:



- En este caso a las aristas se les llama **arcos** y se representan como pares para indicar el orden:
  - **V = { a,b,c,d,e}**
  - **A ={(e,a), (a,b), (b,a), (d,a), (c,d), (d,c),(b,c),(c,b) }**

Tipos de Grafos

- Si se permite que haya más de una arista se habla de **multigrafos**:



Tipos de Grafos

- Cuando las aristas tienen un valor numérico asociado se llama de **grafos valorados**:

- Al valor numérico asociado se le llama **coste** de la arista

Tipos de Grafos

- Los tipos anteriores pueden combinarse, dando lugar por ejemplo a **multigrafos valorados**, o **grafos dirigidos valorados**, etc.

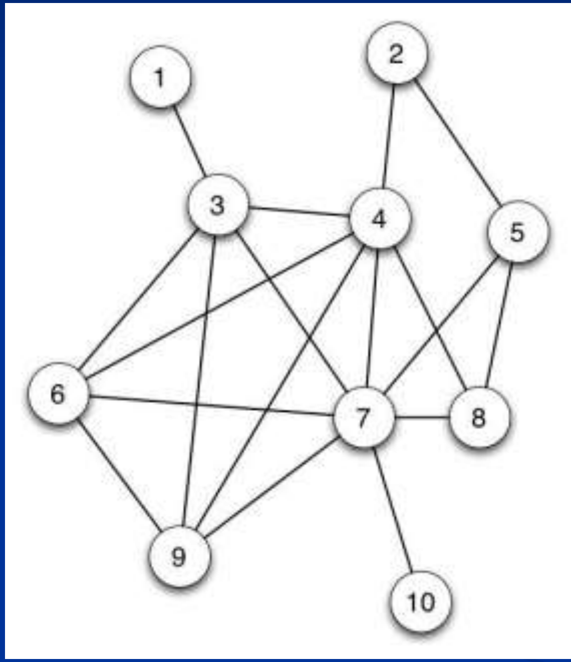
- En el resto del tema cuando no se diga lo contrario G representará un **grafo o multigrafo no dirigido**

Conceptos Básicos

- Dos vértices se dicen **adyacentes** si existe una arista que los une
- Los vértices que forman una arista son los **extremos** de la arista
- Si **v** es un extremo de una arista **a**, se dice que **a** es **incidente** con **v**
- El grado de un vértice **v**, **gr(v)** es el número de aristas incidentes en **v.** Si hace falta indicar el grafo en el que está **v** escribiremos **gr(G,v)**

Conceptos Básicos

- **Ejemplo**:



- gr(6)= ________ gr(1) = _________

Conceptos Básicos

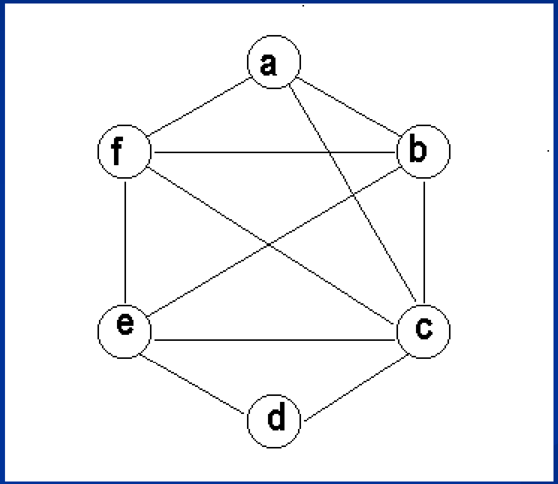
- **Teorema** (de los "apretones de manos")

Sea G=(V,A) un grafo. Entonces: $\sum_{v \in V} \mathbf{gr(v) = 2|A|}$

- Significado: la suma de los grados de todos los vértices es igual a 2 veces el número de aristas
- **Explicación**:

Conceptos Básicos

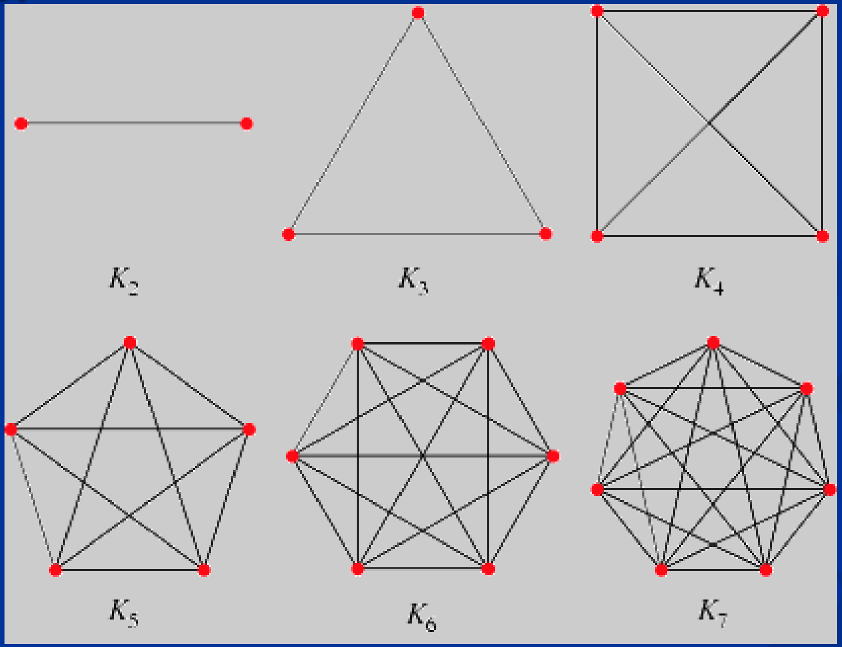
- **Ejemplo**:



- gr(a)+gr(b)+gr(c)+gr(d)+gr(e)+gr(f) = 3+4+5+2+4+4 = **22**
- 2|A| = 2 _____ = ______

Conceptos Básicos

- Para cada **n≥1** se llama **grafo completo** de orden n, y se representa por K_n, al grafo de n vértices conectados de todas las formas posibles:

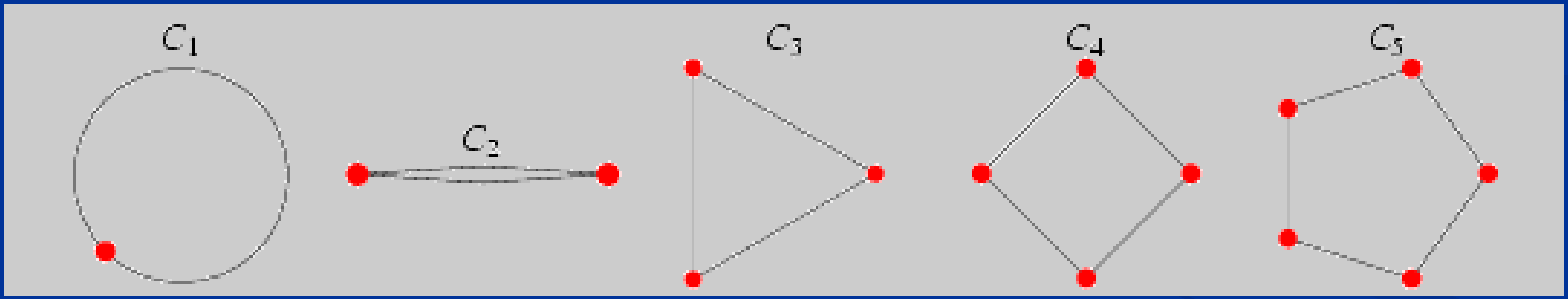


- **Pregunta**: ¿Cuántas aristas tiene en general K_n?

Conceptos Básicos

- Se llama **ciclo** de grado n, y se denota **Cn**, a **$G=(\{v_1,\ldots,v_n\},$**

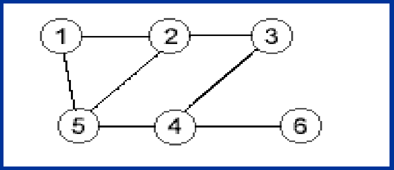
  $\{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\},\ldots, \{v_{n-1}, v_n\}, \{v_n, v_1\}\})$



- **Nota**: A menudo sólo se consideran ciclos para $n\geq 3$

Representación de Grafos

- Para representar los grafos a menudo se utiliza la llamada **matriz de adyacencia**
- Se construye imaginando que en las filas y las columnas corresponden a los vértices. Se pone un 0 para indicar que 2 vértices no son adyacentes, y un 1 para indicar que sí lo son:



G

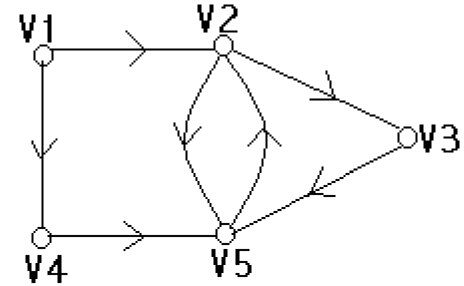
$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{matrix} \\
\begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \\ 6 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{array}
$$

Matriz de Adyacencia de G

- Para representarla en un ordenador se utilizan matriz de valores lógicos (*booleanos*). True → hay arista, False→ no hay arista

Representación de Grafos

- En el caso de un grafo no dirigido la matriz será simétrica. No ocurre lo mismo para grafos dirigidos:

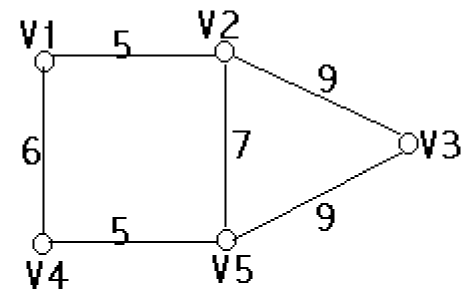


$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & V1 & V2 & V3 & V4 & V5 \\
\hline
\begin{array}{c} V1 \\ V2 \\ V3 \\ V4 \\ V5 \end{array} & \multicolumn{5}{c}{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}
\end{array}
$$

- Se supone que la **fila** representa el vértice **origen**, y la **columna** el vértice **destino** del arco

Representación de Grafos

- La matriz de adyacencia también permite representar **grafos valorados**

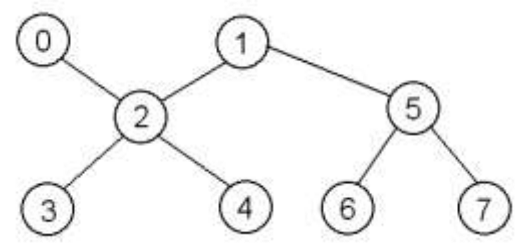


$$
\begin{array}{c|c}
 & \begin{array}{ccccc} V1 & V2 & V3 & V4 & V5 \end{array} \\
\hline
\begin{array}{c} V1 \\ V2 \\ V3 \\ V4 \\ V5 \end{array} &
\begin{pmatrix}
0 & 5 & 0 & 6 & 0 \\
5 & 0 & 9 & 0 & 7 \\
0 & 9 & 0 & 0 & 9 \\
6 & 0 & 0 & 0 & 5 \\
0 & 7 & 9 & 5 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

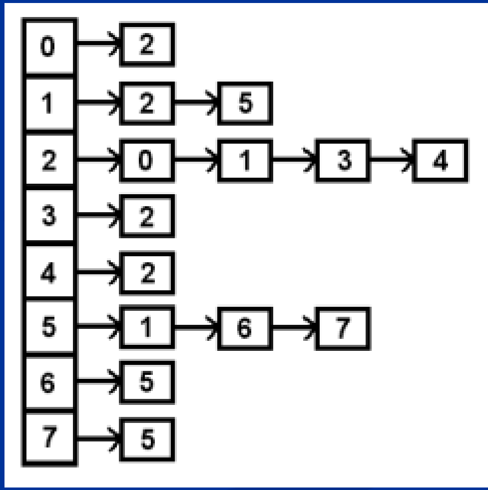
- El valor guardado es el **coste** de la arista/arco
- En lugar de **0**, a menudo se emplea un valor especial **∞** para indicar que dos vértices no están conectados

Representación de Grafos

- En informática a menudo en lugar de la matriz se usa la **lista de adyacencia**
- A cada vértice le corresponde una lista con sus adyacentes:



G



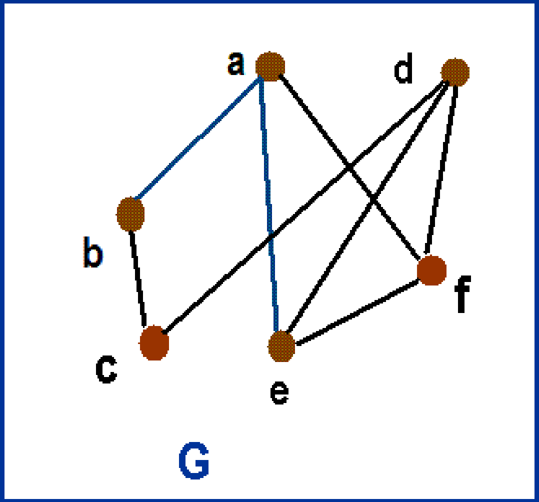
Lista de Adyacencia de G

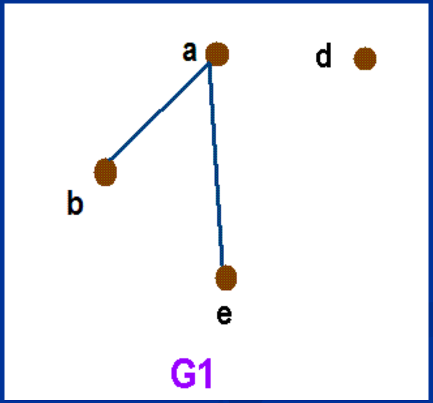
Subgrafos

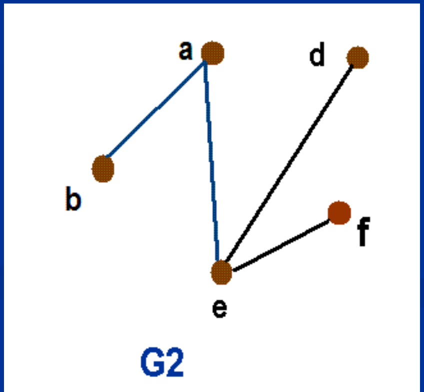
- Sea **G=(V,A)**. **G'=(V',A')** se dice **subgrafo** de **G** si:
  1. **V' $\subseteq$ V**
  2. **A' $\subseteq$ A**
  3. **(V',A')** es un grafo
- Resultado fácil de comprobar:
  - Si **G'=(V',A')** es subgrafo de G, para todo **v $\in$ G** se cumple **gr(G',v)$\leq$ gr(G,v)**

Subgrafos

- Ejemplo:



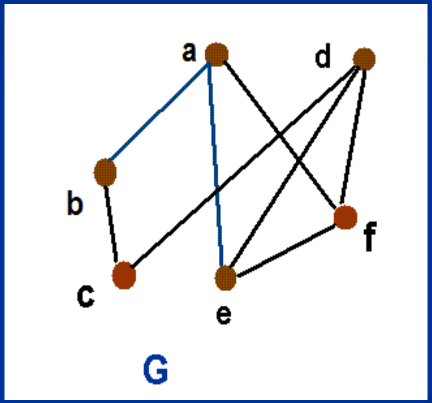




- G1 y G2 son subgrafos de G

Subgrafos

- Un grafo se dice cíclico cuando contiene algún ciclo como subgrafo
- Ejemplo:

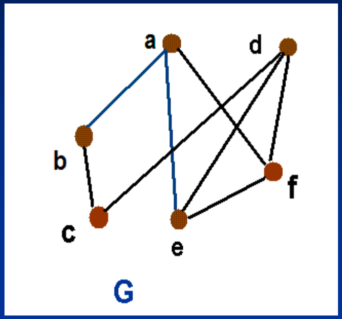


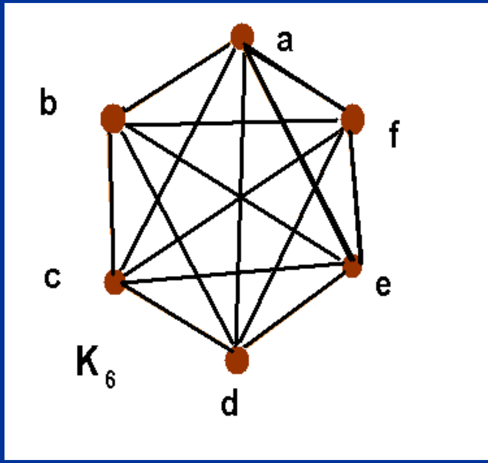
- Contiene dos ciclos de long. 3: {a,e,f,a} y {_, _, _, _}
- Contiene un ciclo de longitud 6: {_,_,_,_,_,_,_}
- ¿Contiene algún ciclo más? ___

Grafo Complementario

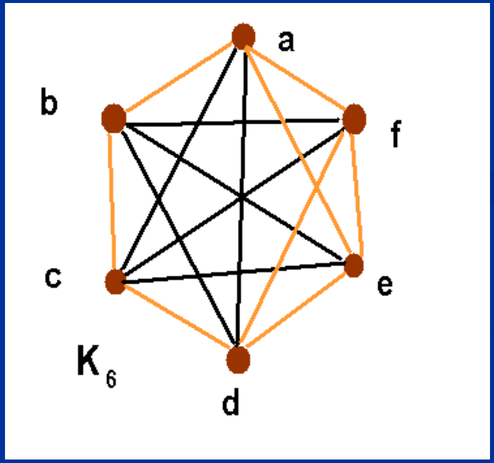
- El complementario **G'** de un grafo **G=(V,A)** tiene:
  - Los mismos vértices que **G**
  - Si **{u,v}** $\in$ **G**, entonces **{u,v}** $\notin$ **G'**
  - Si **{u,v}** $\notin$ **G**, entonces **{u,v}** $\in$ **G'**
- Una forma de construirlo:
  - Dibujar el corresp. grafo completo **Kn**, con **n=|V|**
  - Eliminar de **Kn** las aristas **{u,v}** $\in$ **G**

Grafo complementario

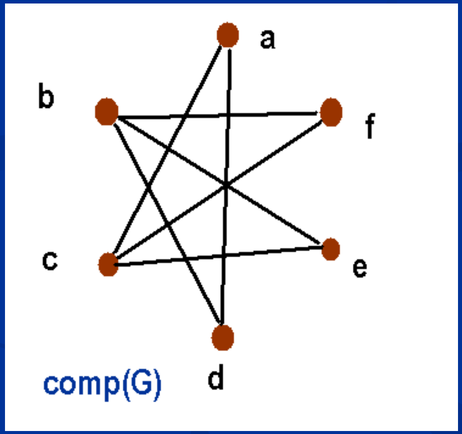
- **Ejemplo** : Complementario de 



1º Representar K6



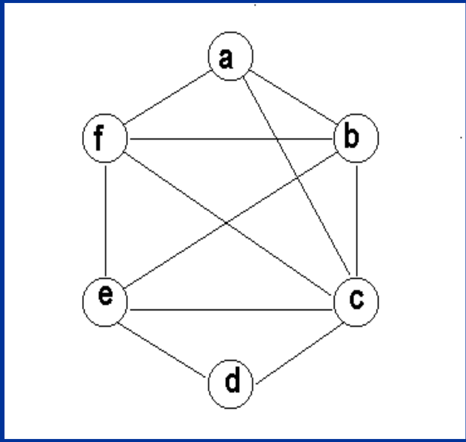
2º Marcar las aristas de G



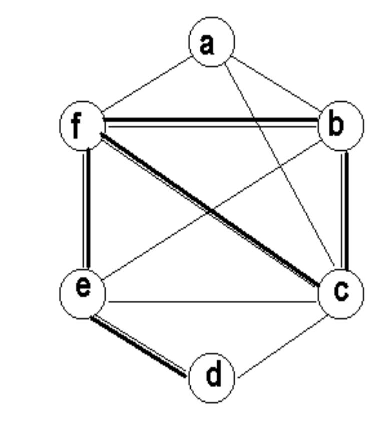
3º Eliminarlas

Caminos y conectividad

- Un **recorrido** en un grafo $G = (V,A)$ es una sucesión de vértices $v_0, v_1, \ldots, v_k$ tal que $\{v_i,v_{i+1}\} \in A$ para todo $0 \leq i < k$
- La **longitud** de un recorrido $v_0, v_1, \ldots, v_k$ es k
- **Ejemplo**:



G



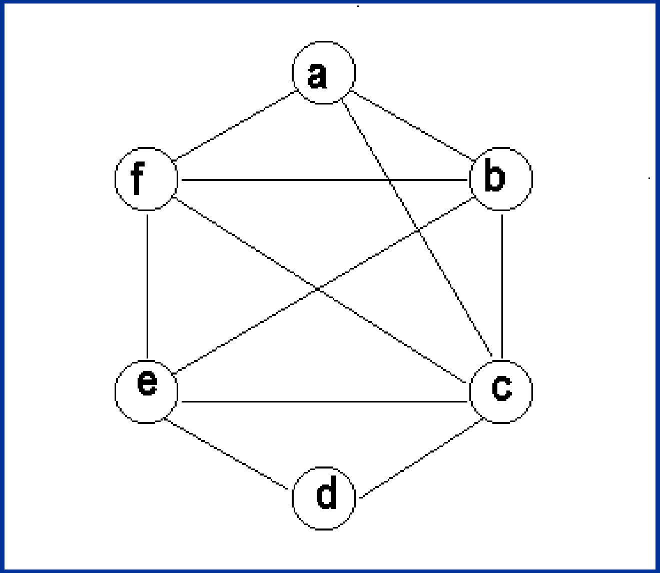
f,b,c,f,e,d es un recorrido de longitud 5 sobre G

Caminos y conectividad

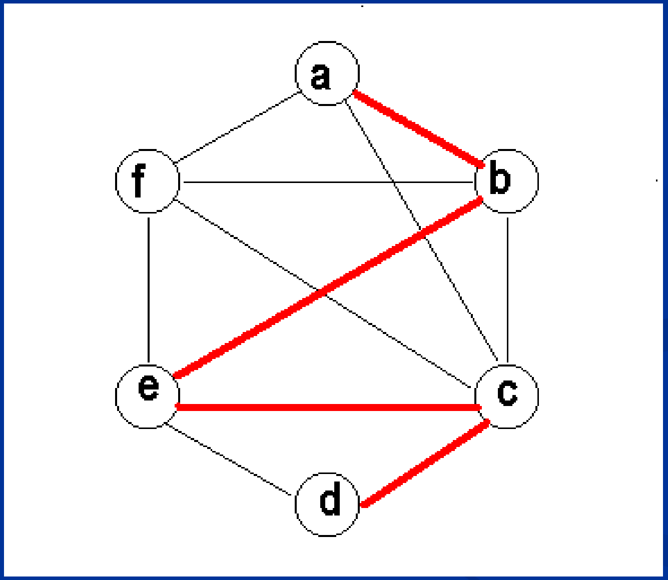
- **Observación**: Un recorrido puede repetir vértices, y puede comenzar y acabar en vértices diferentes
- Un **camino** es un recorrido $v_0, v_1, \ldots, v_k$ en el que $v_i \neq v_j$ para $0 \leq i,j \leq k$, con $i \neq 0$ o $j \neq k$
- Es decir en un camino todos los vértices son **distintos** entre sí, excepto quizás el primero y el último

Caminos y conectividad

- Ejemplo:



G



a,b,e,c,d es un camino

Caminos y conectividad

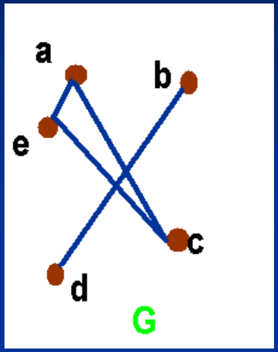
- Si existe un camino entre dos vértices se dice que están **conectados**
- Sea **G=(V,A)** un grafo. La relación

  xRy ⇔ x e y están conectados

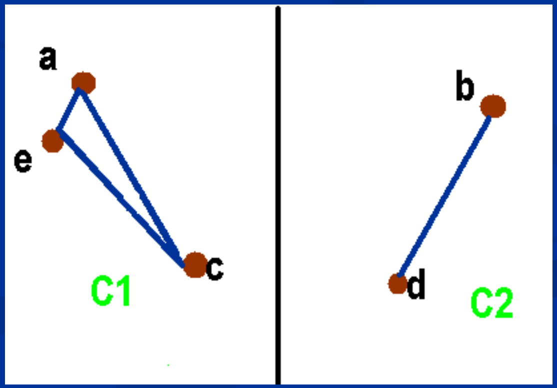
  es de equivalencia ($R \subseteq$ ___)
- Si para todo par de vértices de un grafo están conectados se dice que el grafo es **conexo** g
- Las **componentes conexas** de un grafo G son los mayores subgrafos conexos de G

Caminos y conectividad

- **Ejemplo**. Consideramos el grafo:

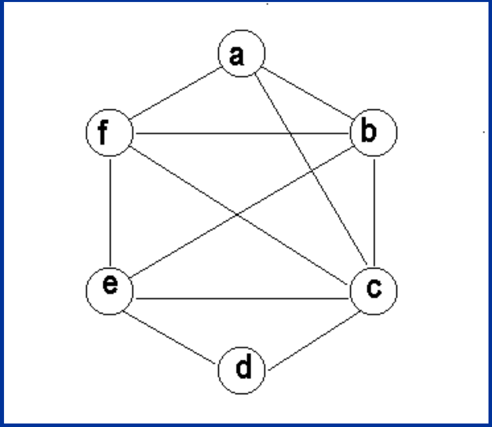


- Se tiene que:
  - G no es conexo: no hay camino entre a y b, por ejemplo.
  - [a] = {a,c,e} [c] = {a,c,e} [e]={a,c,e} [b]={b,d} [d]={b,d}
  - G/R = {[a],[b]}
  - G tiene dos componentes conexas:

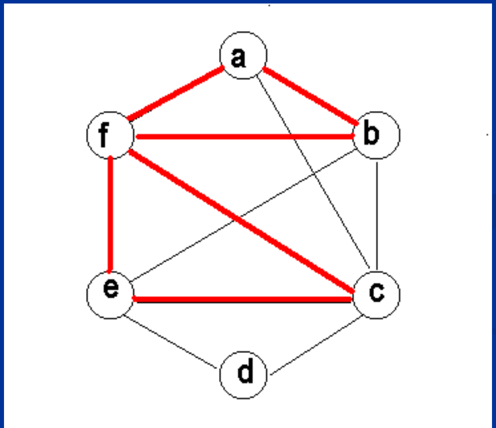


Caminos y conectividad

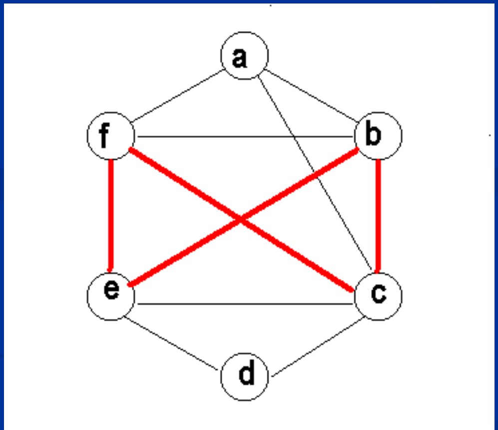
- Un recorrido $v_0, v_1, \ldots, v_k$ tal que $v_0 = v_k$ es un **circuito**
- Un camino $v_0, v_1, \ldots, v_k$ tal que $v_0 = v_k$ es un **ciclo**



G



a,b,f,c,e,f,a es un circuito



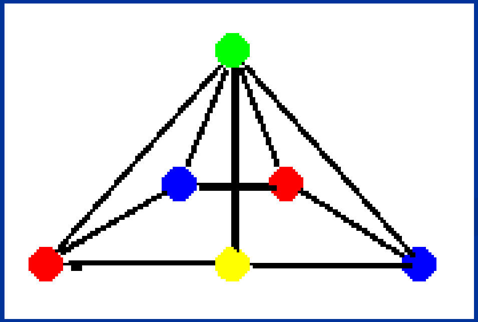
f,c,b,e,f es un ciclo

Grafos Bipartitos

- Un problema interesante en un grafo es determinar su **número cromático**:

¿Cuántos colores son necesarios para pintar los vértices de forma que cada arista una siempre colores distintos?

- **Ejemplo**: Grafo con número cromático 4

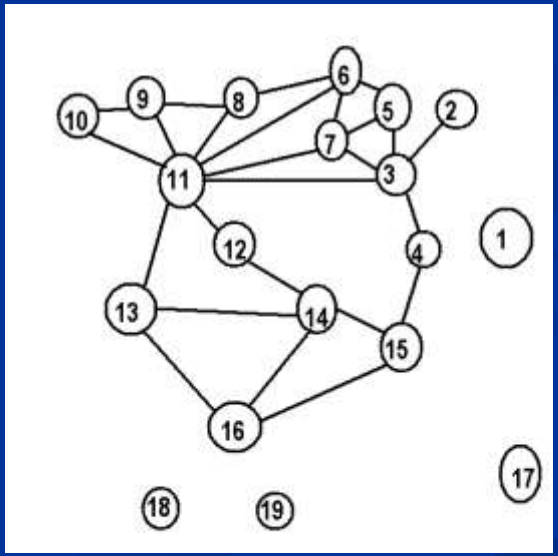


Grafos Bipartitos

- Aplicación: coloreado de mapas
- ¿Cuántos colores se necesitan para colorear un mapa de forma que no haya dos regiones con frontera con el mismo color?

Grafos Bipartitos

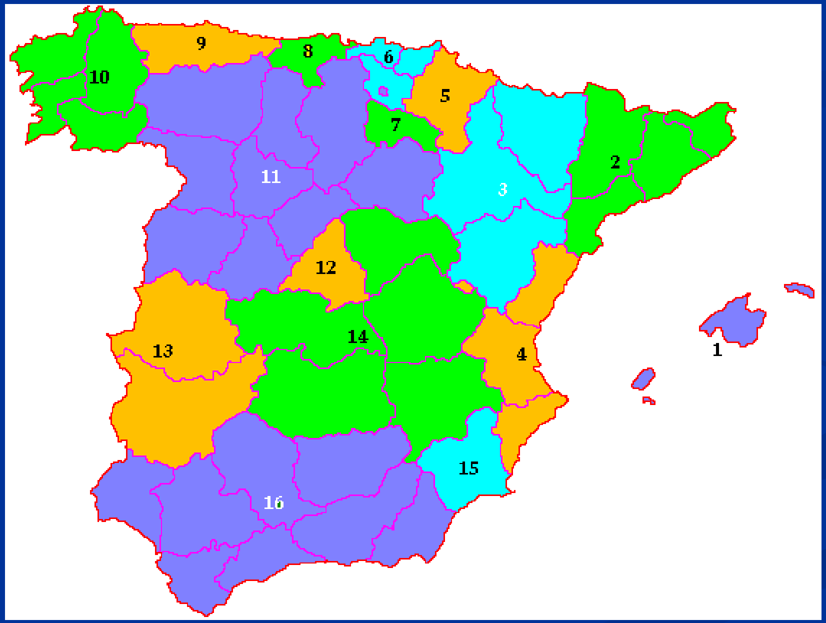
- **Idea**: Transformar el mapa en un grafo, donde cada vértice representa una región y cada arista un límite entre regiones:



¿Cuántos colores se necesitan? → ¿número cromático de este grafo?

Grafos Bipartitos

- **Resultado**: Todos los mapas se pueden colorear con un máximo de 4 colores
- Solución propuesta en 1879, probada en 1976 por K. Appel y W. Haken con la ayuda de un ordenador.

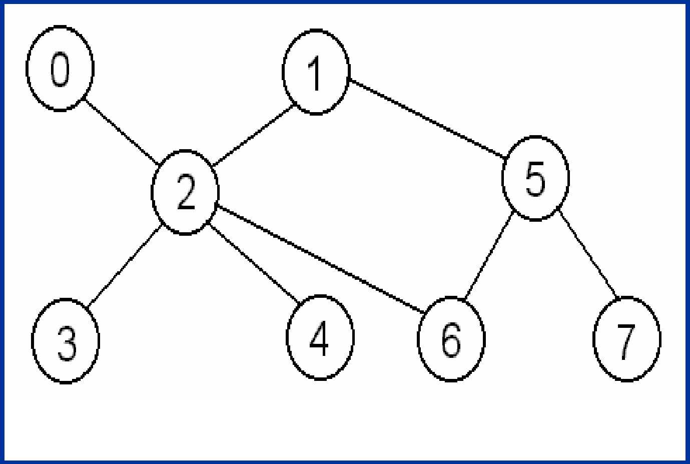


Grafos Bipartitos

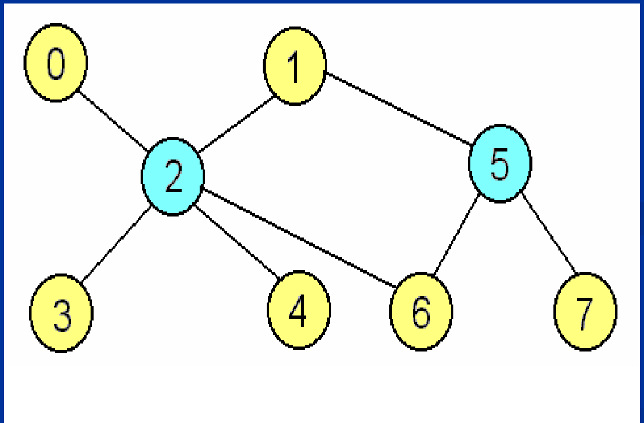
- Nosotros vamos a interesarnos en un caso particular: aquellos grafos que se pueden colorear en **dos** colores→ **grafos bipartitos**
- **Definición**: Sea **G=(V,A)**. Se dice que **G** es bipartito si existen V_1, V_2 tales que:
  1. $V_1 \cup V_2 = V$
  2. $V_1 \cap V_2 = \emptyset$
  3. Para toda $\{v_i, v_j\} \in A$ se cumple $v_i \in V_1$, $v_j \in V_2$

Grafos Bipartitos

- Ejemplos:



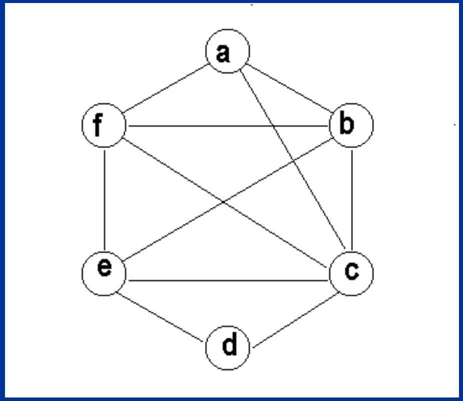
¿Es bipartito ?

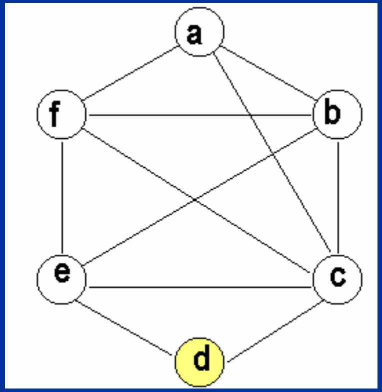


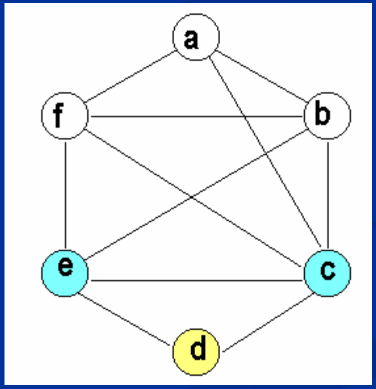
Sí; V1 = {2,5}, V2={0,1,3,4,6,7}

Grafos Bipartitos

- **Idea** de cómo pintarlo:
  - Empezar por un vértice cualquiera, de color C1
  - Dibujar todos los adyacentes de color C2
  - Seguir este proceso hasta haber terminado







Parece que No es bipartito, pero …

¿cómo estar seguros?

Grafos Bipartitos

- **Teorema**: Una grafo es bipartito si y sólo si no tiene ciclos de longitud impar
- **Ejemplo anterior**: No bipartito; contiene ciclos de longitud impar (en la figura aparece marcado uno de long. 3)